Proste zadania z ruchem w układzie kartezjańskim i biegunowym

Zadanie 1a:

Do krawędzi płyty gramofonowej o promieniu R i prędkości kątowej ω przykleiła się zdechła mucha. Podać wielkości jej ruchu wraz z równaniem kinematycznym ruchu i równaniem toru.

We współrzędnych biegunowych, wektor położenia muchy jest równy $\vec{r} = R\,\hat{r}$, zaś prędkość wynosi $\vec{v} = R\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} = \omega\,R\,\hat{\varphi}$. Przyspieszenie jest zatem równe $\vec{a} = -\omega^2 R\,\hat{r}$ (wyłącznie przyspieszenie dośrodkowe; jego źródłem jest siła reakcji na naprężenie tego świństwa, które klei muchę do płyty). Skoro $\dot{\varphi} = \omega \;\Rightarrow\; \varphi = \omega\,t$, zaś

$$\hat{r} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\omega\,t \\ \sin\omega\,t \end{pmatrix},\;\; \hat{\varphi} \;=\; \begin{pmatrix} -\sin\omega\,t \\ \cos\omega\,t \end{pmatrix} \;\;,$$

to analogiczne wielkości w układzie kartezjańskim wynoszą, odpowiednio, $x = R\,\cos\omega\,t$, $y = R\,\sin\omega\,t$; $\vec{v} = (-\omega R\,\sin\omega\,t\,,\;\omega R\,\cos\omega\,t)$ (a zatem $v = \omega R$) oraz $a_n \equiv a_{rad} = -\omega^2 R$, $a_t \equiv a_{trans} = \sqrt{a^2 - a_n^2} = 0$. Równanie toru nie jest imponujące i przyjmuje postać $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

Zadanie 1b:

Ze środka płyty z poprzedniego zadania, ku musze wyrusza ze stałą prędkością v_0 biedronka. Opisać jej przyspieszenie i wskazać tor.

W układzie nieinercjalnym związanym z płytą, biedronka porusza się ze stałą prędkością po poziomej prostej: $x' = v_0\,t\,,\;\; y' = 0.$. Aby zobaczyć, jak to się ma do inercjalnego układu $(x,\,y)$ związanego ze stołem, na którym stoi gramofon i w którym obserwujemy jej ruch, należy $\vec{r}\,'$ złożyć z ruchem obrotowym układu-płyty, a więc potraktować macierzą odwrotną do dwuwymiarowego obrotu o φ (bez większych niespodzianek, jest to po prostu macierz obrotu o kąt $-\varphi$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \cos\omega\,t & -\sin\omega\,t \\ \sin\omega\,t & \cos\omega\,t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} v_0 t\,\cos\omega\,t \\ v_0 t\,\sin\omega\,t \end{pmatrix} \;\;.$$

Skoro biedronka po czasie t pokonuje drogę s równą promieniowi $r \le R$, to

$v_0 t = s = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, skąd $t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_0}$. Z równań kinematycznych ruchu widać jasno, że $\frac{y}{x} = \tan \omega t$ i równanie toru jest przestępne, więc nie procedujemy go już dalej:

$$\frac{y}{x} = \tan \omega \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_0} \quad .$$

Prędkość w układzie kartezjańskim (niewygodnym przy tym rodzaju symetrii) wyniesie

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \omega t - v_0 t \omega \sin \omega t \\ v_0 \sin \omega t + v_0 t \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad .$$

Jak można dalej policzyć, przyspieszenie w układzie kartezjańskim składa się z przyspieszenia Coriolisa i dośrodkowego, i wynosi

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 v_0 \omega \sin \omega t - v_0 t \omega^2 \cos \omega t \\ 2 v_0 \omega \cos \omega t - v_0 t \omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} \quad .$$

Długość wektora prędkości – ze wzoru Pitagorasa – jest równa $v = v_0 \sqrt{1 + (\omega t)^2}$ i oczywiście jest równa v_0 wyłącznie dla zatrzymanej (nieruchomej) płyty. Jako, że przyspieszenie styczne do toru jako jedyne może zmieniać długość wektora prędkości (a normalne – jego kierunek), to naturalnie,

$$a_t = \dot{v} = \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}} \quad ;$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$ (jak ktoś chce, niech sobie wypisze explicité).

W układzie biegunowym $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi})\hat{\varphi}$. Tu sprawy mają się znacznie prościej. W naszym zadaniu $r = v_0 t;\ \dot{r} = v_0,\ \ddot{r} = 0;\ \dot{\varphi} = \omega,\ \ddot{\varphi} = 0$. Stąd

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 - v_0 t \omega^2 \\ 0 + 2 v_0 \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{dośr} \\ a_{Cor} \end{pmatrix} \quad .$$

Zadanie 2:

Z narożników kwadratowego pokoju o boku *a* wyruszają ze stałą prędkością v_0 cztery pająki, z których każdy nakierowuje się dokładnie na kolejnego. Podać tor dowolnego pająka *r(φ)* oraz moment *T* ich spotkania.

Aby najszybciej rozwiązać to zadanie, należy zauważyć, że pająki znajdują się w każdej chwili w narożnikach pewnego (coraz mniejszego i coraz bardziej obróconego) kwadratu. Kwadraty te są koncentryczne. Prędkości pająków będą pokrywać się z kierunkami boków takiego chwilowego kwadratu. A skoro chwilowe *r* pająka rozciąga się dokładnie od środka kwadratu do jego wierzchołka, to prędkość pająka (będąc pod kątem *π/4* do odcinka *r*) rozkłada się na część radialną i transwersalną dokładnie po równo:

$$v_r \equiv \dot{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \ ,$$
$$v_\varphi \equiv r\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \ .$$

Stąd mamy, przez odcałkowanie pierwszego równania, $r = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_0 t + C$, a warunek $r(0) = a\,\frac{\sqrt{2}}{2} = C$ daje nam stałą całkowania, skąd $r = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - v_0 t)$.

Tak samo postępujemy z drugim równaniem, wstawiając doń właśnie znalezioną postać *r* i otrzymując

$$d\varphi = v_0 \frac{dt}{a - v_0 t} \ .$$

Stąd $\varphi = -\ln(a - v_0 t) + C_1$. $\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \ln a$ i, ostatecznie, $\varphi = \ln \frac{a}{a - v_0 t}$.

Równanie toru otrzymamy, wydobywając *t* z równania ruchu po *φ* i wstawiając do równania ruchu po *r*:

$$e^{\varphi} = \frac{a}{a - v_0 t}$$
$$a(e^{-\varphi} - 1) = -v_0 t$$
$$t = \frac{a}{v_0}(1 - e^{-\varphi}) \ ;$$

$$r \;=\; -\frac{\sqrt{2}}{2}\,v_0\,\frac{a}{v_0}\left(1-e^{-\varphi}\right) \;+\; a\frac{\sqrt{2}}{2} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2}\,a\,e^{-\varphi} \quad .$$

Pająki spotykają się na środku pokoju, tj. gdy $r = 0$:

$$a \;=\; v_0 T \;\Leftrightarrow\; T \;=\; \frac{a}{v_0} \quad .$$

Czas jest zupełnie taki sam, jakby pająk pracowicie szedł po boku kwadratu aż do boku, zajmowanego przez kolejnego pająka. Reszta trasy jest tylko „optycznym zniekształceniem” obrazu pokoju.

Zadanie 3:

Po linii prostej ze stałą prędkością c ucieka przed psem zając (nie oszukujmy się: zając nie jest prawdziwy; jest tylko szmatką ciągniętą na sznurku, a i co do psa nie ma pewności). Pies, który początkowo znajduje się w odległości a od zająca, kieruje się cały czas prosto na niego i ma stałą prędkość v. Podać explicité równanie toru $y(x)$ psa.

Dla ustalenia uwagi: w chwili $t = 0$ pies znajduje się w początku układu współrzędnych, a zając w punkcie $(a, 0)$ i ucieka prosto w górę, wzdłuż prostej $x = a$.

W ten sposób, w dowolnej chwili t, różnica współrzędnych zająca i psa wynosi, odpowiednio, po x: $a - x$, zaś po y: $ct - y$.

Jedno z równań, które wiąże nam x z y dostaniemy więc z tangensa chwilowego kąta nachylenia toru:

$$\tan\alpha \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; \frac{ct - y}{a - x} \quad .$$

To równanie nie wystarczy, bo musimy jeszcze wyeliminować zmienną niezależną t. Ale, zdajemy sobie sprawę, że pies – niezależnie od tego, jakim torem się porusza – pokonuje stałą drogę ds w tym samym czasie dt, bowiem $ds = v\,dt$. To daje nam drugie potrzebne równanie, mianowicie

$$v\ dt \ = \ ds \ = \ \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \ = \ \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \ dx \quad ,$$

skąd

$$t \ = \ \frac{1}{v} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \ dx \quad .$$

Wstawiając do równania na tangens nachylenia toru, mamy

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{1}{a - x} \left[\frac{c}{v} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \ dx \ - \ y\right] \quad .$$

Całki pozbędziemy się, powiększając stopień równania, czyli różniczkując jeszcze raz po czasie. To usunie ją w jednym, a odtworzy ją w drugim wyrazie pochodnej ilorazu po prawej stronie; jednak następnie podstawimy do niego tę samą całkę z powyższej postaci, eliminując ją zupełnie (różniczkowanie po czasie zapewni, że nie otrzymamy tożsamości *0 = 0*).

W ten zaś sposób dostaniemy same pochodne y po x (mianowicie, pierwszą i drugą), oraz funkcje x i y. Tego właśnie równania szukamy.

$$\frac{d^2 y}{d x^2} \ = \ \frac{(a - x)\left(\frac{c}{v}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ - \ \frac{dy}{dx}\right) \ + \ \frac{c}{v}\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \ dx \ - \ y}{(a - x)^2} \ =$$

$$= \ \frac{\left(\frac{c}{v}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ - \ \frac{dy}{dx}\right)}{a - x} \ + \ \frac{1}{a - x}\,\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{1}{a - x}\,\frac{c}{v}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad .$$

Redukujemy stopień równania przez podstawienie $u \ := \ \frac{dy}{dx}$, a przy okazji wprowadzamy stałą proporcjonalności $k \ := \ \frac{c}{v}$. Mamy więc

$$\frac{du}{dx} \ = \ \frac{k\sqrt{1 + u^2}}{a - x}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \ = \ k\,\frac{dx}{a - x}$$

$$\ln\left(u \ + \ \sqrt{1 + u^2}\right) \ = \ -k\ \ln(a - x) \ + \ C \quad .$$

Stała wynika z warunku Cauchy'ego: ponieważ *u(0) = 0* oraz *x(0) = 0* , $C = k \ln a$.

$$\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = k \ln \frac{a}{a-x} \Leftrightarrow u + \sqrt{1+u^2} = \left(\frac{a}{a-x}\right)^k .$$

Niewygodnego pierwiastka pozbywamy się, mnożąc obustronnie przez $u - \sqrt{1+u^2}$ i odejmując równania: wyjściowe i wynikowe stronami:

$$2u = \left(\frac{a}{a-x}\right)^k - \left(\frac{a}{a-x}\right)^{-k} .$$

Dla łatwości całkowania, odwracamy ułamki i dostajemy

$$dy = \frac{1}{2} dx \left[\left(\frac{a-x}{a}\right)^{-k} - \left(\frac{a-x}{a}\right)^{k} \right]$$
$$y - C = \frac{1}{2}\int \left(\frac{a-x}{a}\right)^{-k} dx - \frac{1}{2}\int \left(\frac{a-x}{a}\right)^{k} dx$$
$$y - C = \frac{1}{2}\frac{a}{k-1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1-k} + \frac{1}{2}\frac{a}{k+1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1+k} .$$

Stała C wynika z warunku *y(x = 0) = 0* :

$$C = \frac{1}{2}\frac{a}{1-k} - \frac{1}{2}\frac{a}{1+k} .$$

Otrzymaliśmy kompletne równanie toru psa. Czytelnikowi pozostawiamy dyskusję wyników.

Z ćwiczeń ze Wstępu do Fizyki I (prowadzący: Andrzej Fengler)

rozwiązał i spisał: Marek Pietrachowicz.